

Paper Type: Original Article

Pseudo Inefficiency in Multi-Period Systems: A DEA-Based Approach

Mahsa Torkavannejad¹, Ghasem Tohidi², Behrouz Daneshian², Mahnaz Maghbouli^{3,*} , Farzin Modarres Khiyabani¹

¹ Department of Mathmatic, Tabriz Branch, Islamic Azad University, Tabriz, Iran; torkavan@yahoo.com; iauasrb@gmail.com.

² Department of Mathmatic, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran; gas.tohidi@iauctb.ac.ir; be_daneshian@yahoo.com.

³ Department of Mathmatic, Aras Branch, Islamic Azad University, Jolfa, Iran; mmaghbouli@gmail.com.

Citation:



Torkavannejad, M., Tohidi, Gh., Daneshian, B., Maghbouli, M., & Modarres Khiyabani, F. (2023). Pseudo inefficiency in multi-period systems (a DEA-based approach). *Innovation management and operational strategies*, 4(1), 28-PP.

Received: 29/10/2021

Reviewed: 01/12/2021

Revised: 19/01/2022

Accepted: 15/02/2022

Abstract

Purpose: Standard Data Envelopment Analysis (DEA) models measure the efficiency of Decision-Making Units (DMUs) over a period. In actual occasions, multiple periods are presented. In the presence of a multi-period system, overall efficiency depends on the performance of the DMU in all periods. That is to say, periodic efficiencies must be calculated. Also, the overall efficiency is dependent on periodic efficiencies. In other words, a DMU cannot be efficient overall, but it is considered an efficient unit in each separate period. Hence, the question of pseudo-inefficiency is raised. This paper investigates Ratio-based Data Envelopment Analysis (DEA-R) models to detect pseudo-inefficiency in multi-period systems.

Methodology: The proposed algorithm consists of three steps. The average period efficiencies are calculated as the first step and the overall efficiency is evaluated as a block box. For the last step, a ratio of two quantities is estimated. If this ratio is close to unity, these two quantities have no significant difference. Otherwise, the estimate claims pseudo-inefficiency.

Findings: A comparison is made between Kao and Liu [8] and the proposed algorithm to measure the efficiency of 22 Taiwanese commercial banks from 2009-2011. The results demonstrate the proposed method's practicality and superiority compared with the existing multi-period models.

Originality/Value: In the literature, pseudo-inefficiency has been detected by applying periodic weights. This paper proposes a three-step algorithm to investigate pseudo-inefficiency.

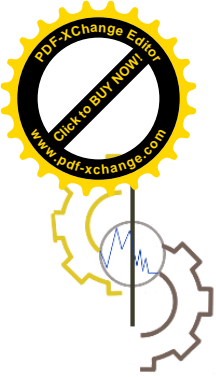
Keywords: Multi-period system, Overall efficiency, Periodic efficiency, Pseudo efficiency.

Corresponding Author: mmaghbouli@gmail.com

 <http://dorl.net/dor/20.1001.1.27831345.1402.4.1.3.3>



Licensee. **Innovation Management & Operational Strategies**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



نوع مقاله: پژوهشی



روشی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌ها برای شناسایی ناکارایی کاذب در سیستم‌های چندمرحله‌ای

مهسا ترکاوان نژاد^۱، قاسم توحیدی^۲، بهروز دانشیان^۲، مهناز مقبولی^۳، فرزین مدرس خیابانی^۱

^۱گروه ریاضی، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران.

^۲گروه ریاضی، واحد تهران مرکز، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

^۳گروه ریاضی، واحد ارس، دانشگاه آزاد اسلامی، جلفا، ایران.

چکیده

هدف: مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها، برای ارزیابی کارایی یک سیستم، اطلاعات ورودی و خروجی واحدهای تصمیم‌گیرنده را در یک دوره زمانی در نظر می‌گیرند؛ اما در برخی از سیستم‌های موردبررسی، چند دوره زمانی مجزا و مستقل از هم موردنظر است و کارایی کل سیستم به کارایی واحدهای تصمیم‌گیرنده در هر دوره زمانی وابسته خواهد بود. در این حالت ممکن است واحدی در تمام دوره‌ها کارا باشد اما کارایی کل نباشد؛ که در این صورت با مفهومی به نام ناکارایی کاذب مواجه خواهیم شد.

روش‌شناسی پژوهش: در این مقاله برای بررسی ناکارایی کاذب در سیستم‌های چند دوره‌ای، به‌جای استفاده از وزن‌ها که از هر دوره زمانی به دست می‌آید، با استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی، الگوریتمی سه مرحله‌ای پیشنهاد می‌شود. علت استفاده از مدل‌های نسبی به دلیل انعطاف‌پذیری آن‌ها و نزدیک‌تر بودن تقریب آن به واقعیت است.

یافته‌ها: در گام اول الگوریتم، میانگین کارایی‌های دوره‌ای و در گام دوم کارایی سیستم به‌عنوان جعبه سیاه محاسبه می‌شود. نسبت حاصل از این دو کمیت، اگر عددی نزدیک به یک باشد، یعنی این دو برآورد به هم نزدیک هستند و ناکارایی کاذب وجود ندارد و اگر نسبت حاصل از یک بزرگ‌تر باشد در این صورت این دو برآورد از هم فاصله دارند و ناکارایی کاذب موجود است.

اصالت/ارزش افزوده علمی: مقایسه روش پیشنهادی بر روی داده‌های ۲۲ بانک تجاری از تابوان در طی یک دوره زمانی سه ساله با روش پیشنهادی کایو و لیو [8] از لحاظ آماری دلالت بر کاهش پراکندگی اعداد کارایی داشت. همچنین آزمون‌های آماری حاکی از قوت روش پیشنهادی نسبت به روش کایو و لیو [8] می‌باشد.

کلیدواژه‌ها: تحلیل پوششی داده‌ها مبتنی بر تحلیل کسری، سیستم‌های چند دوره‌ای، کارایی دوره‌ای، کارایی کلی، ناکارایی کاذب.

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها^۱ روش غیر پارامتری است که کارایی نسبی واحدهای متجانس با چند ورودی و چند خروجی را در مقایسه با یکدیگر ارزیابی می‌کند. در این روش نیازی به شناخت شکل تابع تولید نبوده و محدودیتی در تعداد ورودی‌ها و خروجی‌ها نمی‌باشد. نخستین بار

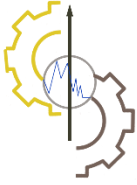
¹ Data Envelopment Analysis (DEA)

* نویسنده مسئول

mmaghboul@gmail.com

<http://dorl.net/dor/20.1001.1.27831345.1402.4.1.3.3>



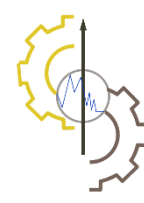


[1] در سال ۱۹۵۷، به تعیین کارایی به روش غیر پارامتری پرداخت. چارنس و همکاران [2] به تعمیم کار فارل پرداختند و نتیجه کار آن‌ها به‌عنوان مدل CCR^1 ، در سال ۱۹۷۸ انتشار یافت. بنکر و همکاران [3] با معرفی مدل BCC^2 در حقیقت، کار چارنس و همکاران [2] را توسعه بخشیدند. هر چه مدل‌های استاندارد و معرفی شده DEA از انعطاف‌پذیری زیادی برخوردارند؛ اما بیشتر مطالعات DEA با داده‌های مقطعی و اندازه‌گیری کارایی نسبی در یک دوره، سروکار داشتند؛ اما سوال اساسی زمانی است که چند دوره زمانی برای ارزیابی کارایی نسبی واحدها مورد توجه قرار بگیرد. یکی از روش‌های ۵۴۲۱ پیشنهادی، روش DEA پویا یا دینامیک است که برای اولین بار توسط فار و گروسکف [4] معرفی شد. کاپو [5] برای مطالعه سیستم‌های با ساختار سری از مدل‌های پویا استفاده کردند. تون و تسوتوسی [6] نیز از دیگر توسعه‌دهندگان این روش در مطالعه ساختارهای شبکه بودند. ماریز و همکاران [7] مروری بر مدل‌های پویا و کاربرد آن‌ها در مطالعات مختلف داشتند. نکته مشترک در مطالعات DEA پویا این بود که برای محاسبه کارایی کل، کل ورودی‌های مصرفی و کل خروجی‌های تولیدشده در همه دوره‌ها برای اندازه‌گیری کارایی در نظر گرفته می‌شود. کارایی کل محاسبه‌شده با استفاده از داده‌های استفاده‌شده در کل دوره، تنها کارایی کل واحد تحت ارزیابی^۳ را به دست می‌دهد و کارایی دوره‌ای دوره‌های اختصاصی نامعلوم باقی می‌ماند. به بیان ساده‌تر، یک واحد می‌تواند کارای کلی باشد اما الزاما در تمام دوره‌ها کارا نباشد. در واقع احتمال دارد که DMU در یک دوره ناکارا باشد، درحالی‌که کارای کلی است؛ بنابراین اگر کارایی دوره خاصی مورد نظر است، محاسبه جداگانه آن نیز اهمیت پیدا می‌کند. با این حال کارایی‌هایی که به این ترتیب محاسبه می‌شوند در دوره‌های مختلف قابل مقایسه نیستند. برای مثال، کشور تایوان با وسعتی کمتر از ۳۶۰۰ کیلومتر مربع، با رشد سریع اقتصادی که از سال ۱۹۹۰ آغاز شده، یکی از چهار غول برتر اقتصادی آسیا نام گرفته است. بررسی عملکرد بانک‌های تجاری این کشور در طول دوره سه ساله که از سال ۲۰۰۹ تا سال ۲۰۱۱ صورت گرفته است، افزایش و کاهش در میزان کارایی بانک‌ها را در هر سال نشان می‌دهد و این در حالی است که محاسبه کارایی سالیانه تصویر کلی از عملکرد این بانک‌ها را در طول دوره سه ساله مورد بررسی به‌درستی منعکس نمی‌کند. چه‌بسا در طول دوره سه ساله، واحدی کارا قلمداد گردد اما الزاما در یک سال کارا ارزیابی نگردد. برای دخیل کردن کارایی دوره‌ای در محاسبه کارایی چند دوره‌ای، روش تحلیل پوششی داده‌های چند دوره‌ای ($Multi$ $Period$ DEA) توسط کاپو و لی [8] ارایه شد. مدل پیشنهادی، کارایی کل و کارایی دوره‌ای را هم‌زمان محاسبه می‌کند. مطالعات موردی بر روی ۲۲ بانک تجاری در تایوان دال بر قوت تمایز مدل پیشنهادی در مقایسه با مدل‌های دینامیک یا پویا می‌باشد. جابلونسکی و همکاران [9] مدل تحلیل پوششی داده‌های چند دوره‌ای و مساله تخصیص منابع را پیشنهاد دادند. در مطالعه موردی انجام‌شده دانشکده‌های اقتصاد جمهوری چک در طی دوره ۷ ساله از ۲۰۰۸ تا ۲۰۱۴ مورد ارزیابی قرار گرفتند که در آن ورودی دوره t بر اساس امتیاز کارایی و ابرکارایی دوره قبلی معین می‌شود. بانسال و مهرا [10] نیز مدل تحلیل پوششی داده‌های چند دوره‌ای را با داده‌های نامنفی و نامطلوب توسعه دادند. از جمله تحقیقات اخیر در زمینه تحلیل پوششی داده‌های چند دوره‌ای می‌توان به مقالات توانا و همکاران [11] و ژو و همکاران [12] اشاره نمود. توانا و همکاران [11] مدل چند هدفه فازی را بر اساس اصول موضوعه تحلیل پوششی داده‌های چند دوره‌ای پیشنهاد کرده و از این مدل برای ارزیابی کارایی پالایشگاه‌های نفت بهره بردند. ژو و همکاران [12] نیز ارزیابی کارایی سیستم‌های چند دوره‌ای را بر اساس مدل تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای مورد بررسی قرار دادند. نقطه قوت این کار در نظر گرفتن فیدبک‌ها در سیستم‌های چند دوره‌ای می‌باشد. الگوریتم پیشنهادی در این مقاله جهت ارزیابی داده‌های واقعی با دوره زمانی پنج ساله مورد استفاده قرار گرفت. اولین بار مدل تحلیل پوششی داده مبتنی بر تحلیل کسری یا همان $DEA-R$ توسط دسپیک و همکاران [13] پیشنهاد شد. آن‌ها با معرفی مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها بر اساس تحلیل کسری رابطه بین میانگین حسابی، هندسی و وزنی در مقدار کارایی را به دست آوردند. ووی و همکاران [14]، [15] با استفاده از مدل‌های $2I$ $DEA-R$ مرکز درمانی را در تایوان مورد ارزیابی قرار داده و مفهوم ناکارایی کاذب را معرفی نمودند. مظفری و همکاران [16]، [17] بحث کارایی درآمد و هزینه را در مدل‌های DEA و $DEA-R$ را درحالی‌که داده‌های نسبی در دسترس باشند مورد مطالعه قرار دادند. هدف اصلی این مقاله مطالعه ارزیابی کارایی نسبی در سیستم‌های چند دوره‌ای با استفاده از مدل‌های $DEA-R$ می‌باشد. گرامی و همکاران [18] روشی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های چند معیاره برای ارزیابی کارایی سیستم‌های دومرحله‌ای در حضور داده‌های نسبی پیشنهاد کردند. روش پیشنهادی برای ارزیابی کارایی ۶۰ بانک در ایران مورد استفاده قرار گرفته است. همچنین، مظفری و همکاران [19] روشی مبتنی بر برنامه‌ریزی چند هدفه برای حل مسایل $DEA-R$ پیشنهاد دادند و با استفاده از الگوریتم موجود قادر به تخمین مرز کارا در حضور داده‌های نسبی شدند. نقطه تمایز این مقاله، تعیین و تشخیص ناکارایی کاذب در سیستم‌های چند دوره‌ای است. سیستم‌های مورد نظر در این ساختار، دارای چند دوره زمانی مجزا هستند. در نتیجه این مساله پیش می‌آید که آیا در چنین ساختارهایی لزوما تمام ورودی‌ها در تولید خروجی‌ها نقش دارند یا نه؟ پاسخ به این سوال به‌وضوح منفی است؛ زیرا ممکن

¹ Charnes, Cooper and Rhodes (CCR)

² Banker, Charnes and Cooper (BCC)

³ Decision Making Unit (DMU)



است برخی از ورودی‌ها در تولید خروجی‌ها نقش نداشته باشد و از این‌رو مساله سنجش کارایی با مفهوم ناکارایی کاذب مواجه می‌شود. به این معنا که واحدی در کل دوره زمانی موردنظر کارا ارزیابی گردد اما در هر تک دوره زمانی که به صورت مجزا موردبررسی قرار می‌گیرد کارا نباشد. در این صورت با مفهومی به نام ناکارایی کاذب مواجه خواهیم شد. در مقالاتی که تاکنون در این زمینه موردبررسی قرار گرفته اند مساله ناکارایی کاذب زیر ذره‌بین قرار نگرفته است. برای بررسی مفهوم ناکارایی کاذب، از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی یا همان *DEA-R* استفاده خواهیم کرد. دلیل استفاده از این مدل‌ها، انعطاف‌پذیری آن‌ها و نیز استفاده از نسبت‌های ورودی و خروجی به جای شاخص‌های ورودی و خروجی می‌باشد؛ زیرا نسبت‌ها یکی از ابزارهای مهم در ارتباط با عملیات و وضعیت مالی یک واحد تحت ارزیابی می‌باشد و قاعده محاسبه نسبت‌ها در بررسی عمده صورت‌های مالی و تعیین نقاط ضعف و قوت واحدهای تصمیم‌گیرنده اهمیت پیدا می‌کند. در سیستم‌های چند دوره‌ای با چند دوره زمانی مجزا این نسبت‌ها بیشتر مفهوم می‌گردد که با نسبت‌های هر دوره زمانی مجزا، مقایسه شوند. از این‌رو، در این مقاله با استفاده از مدل‌های *DEA-R* پیشنهادی ابتدا به ارزیابی کارایی کلی و کارایی دوره‌ای در سیستم‌های چند دوره‌ای پرداخته و سپس ناکارایی کاذب با استفاده از مدل پیشنهادی مشخص می‌گردد. جهت تاکید بر نقطه قوت مدل پیشنهادی، مدل موردنظر بر روی داده‌های ۲۲ بانک تجاری تایوان پیاده‌سازی شده و با مدل‌های موجود مقایسه می‌شود. مقاله به صورت زیر سازمان‌دهی می‌شود: در بخش ۲ مفاهیم اولیه ارایه، سپس در بخش ۳، مدل پیشنهادی بر اساس ساختار مدل‌های تحلیل پوششی داده‌های نسبی ارایه می‌شود و در نهایت مثال عددی و مطالعه کاربردی در بخش ۴ ارایه می‌گردد.

۲- مبانی نظری و پیشینه پژوهش

مدل‌های *DEA-R*

فرض کنید X_{ij} و Y_{rj} به ترتیب i th ورودی و r th خروجی ($i=1, \dots, m$ و $r=1, \dots, s$)، DMU_j $j=1, \dots, n$ باشند با فرض مثبت بودن داده‌های ورودی و خروجی و در دسترس بودن نسبت‌های $\frac{x_{ij}}{x_{ip}}$ و $\frac{y_{rj}}{y_{rp}}$ ، برای ارزیابی کارایی DMU_p ، بر اساس مدل‌های استاندارد تحلیل پوششی داده‌ها، دسپیک و همکاران [13] مدل *DEA-R* را برای ارزیابی کارایی DMU_p با فرض بازده به مقیاس ثابت به صورت زیر پیشنهاد دادند:

$$\hat{e}_p = \text{Max}_{w_{ir}} \text{Min}_j w_{ir} \frac{\sum_{i=1}^m x_{ij}}{\sum_{r=1}^s y_{rp}}, \quad (1)$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^m \sum_{r=1}^s w_{ir} = 1,$$

$$w_{ir} \geq 0 \text{ for all } i=1, \dots, m, r=1, \dots, s.$$

همچنین دسپیک و همکاران [13] مدل هارمونیک *DEA-R* را برای ارزیابی کارایی DMU_p با فرض بازده به مقیاس ثابت به صورت مدل (۳) پیشنهاد دادند:

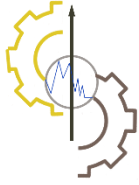
$$\bar{e}_p = \text{Max}_{(u,v)} \text{Min}_j \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{x_{ij}}{x_{ip}} \right) \left(\sum_{r=1}^s u_r \frac{y_{rj}}{y_{rp}} \right), \quad (2)$$

s.t.

$$\sum_{r=1}^s u_r = 1, \sum_{i=1}^m v_i = 1,$$

$$u_r, v_i \geq 0 \text{ for all } i=1, \dots, m, r=1, \dots, s.$$

علاوه بر دو مدل موجود برای ارزیابی کارایی در حضور داده‌های نسبی، مدل زیر نیز برای ارزیابی پیشنهاد شده است [20]:



$$e_p = \text{Max}_{(u,v)} \text{Min}_j \frac{\sum_{i=1}^m v_i \frac{x_{ij}}{x_{ip}}}{\sum_{r=1}^s u_r \frac{y_{rj}}{y_{rp}}}, \quad (۳)$$

s.t.

$$\sum_{r=1}^s u_r = 1, \quad \sum_{i=1}^m v_i = 1,$$

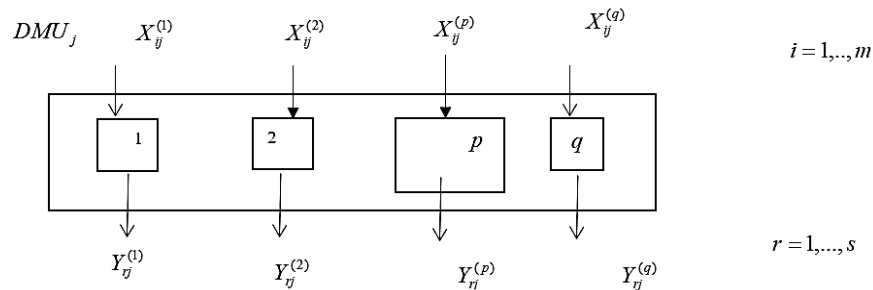
$$u_r, v_i \geq 0 \text{ for all } i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s.$$

مدل فوق، با فرض مثبت بودن داده‌های ورودی و خروجی و در دست بودن نسبت‌های $\frac{x_{ij}}{x_{ip}}$ و $\frac{y_{rj}}{y_{rp}}$ پیشنهاد شده است. از آن جایی که هر سه مدل برای ارزیابی کارایی در حضور داده‌های نسبی به کار می‌رود، رابطه بین این سه مدل مورد سوال است. وی و همکاران [14] رابطه بین این سه مدل را به صورت زیر ثابت کرده‌اند:

$$e_p < \bar{e}_p < \hat{e}_p.$$

کارایی چند دوره‌ای

مجددا فرض کنید X_{ij} و Y_{rj} به ترتیب i th ورودی و r th خروجی ($i = 1, \dots, m$) و ($r = 1, \dots, s$)، $DMU_j (j = 1, \dots, n)$ باشند و سیستم نیز متشکل از q دوره باشد که دوره p ($p = 1, \dots, q$) ورودی نظیر $X_{ij}^{(p)} (i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n)$ را برای تولید خروجی $Y_{rj}^{(p)} (r = 1, \dots, s, j = 1, \dots, n)$ مصرف می‌کند. سیستم چند دوره‌ای متشکل از q دوره در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱- سیستم چند دوره‌ای.

Figure 1- Multi-period system.

مقادیر نهایی ورودی i th و خروجی r th برای تمام این q دوره برای DMU_j به ترتیب عبارت است از: $X_{ij} = \sum_{p=1}^q X_{ij}^{(p)}$ و $Y_{rj} = \sum_{p=1}^q Y_{rj}^{(p)}$. یکی از روش‌های پیشنهادی مربوط به کایو و لیو [8] می‌باشد. در این مقاله برای ارزیابی هم‌زمان کارایی کلی و کارایی مختص هر دوره (کارایی دوره‌ای) در سیستم چند دوره‌ای متشکل از q دوره به صورت زیر بیان می‌شود:

$$E = \max \sum_{r=1}^s u_r Y_{rk},$$

s.t.

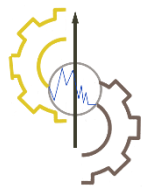
$$\sum_{i=1}^m v_i X_{ik} = 1,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0, j = 1, \dots, n,$$

$$\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj}^{(p)} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij}^{(p)} \leq 0, j = 1, \dots, n, p = 1, \dots, q,$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon, r = 1, \dots, s, i = 1, \dots, m.$$

(۴)



مدل (۴) دارای دو ویژگی مهم است. اولین ویژگی این مدل یکسان بودن ضرایب مربوط به فاکتورهای ورودی و خروجی صرف نظر از متناظر می باشد؛ به عبارت دیگر در $X_{ij}^{(p)}$ و $Y_{rj}^{(p)}$ دوره های مختلف $p, (p=1,2,\dots,q)$ ضرایب یکسان v_i و u_r را دارند. ویژگی دوم این است که در محاسبه کارایی کل سیستم، نه تنها باید ورودی ها و خروجی ها را در نظر گرفت، بلکه باید دوره های متناظر آن ها را هم مدنظر داشت. از آن جایی که مجموع محدودیت های متناظر q دوره برای یک $(p=1,\dots,q)$ DMU $\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj}^{(p)} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij}^{(p)} \leq 0$ ، معادل با محدودیت نظیر کل سیستم برای هر DMU است؛ یعنی همان محدودیت $\sum_{r=1}^s u_r Y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i X_{ij} \leq 0$ ؛ بنابراین محدودیت سوم در این مدل زاید می باشد؛ بنابراین بعد از محاسبه جواب های بهین u_r^*, v_i^* کارایی کل و کارایی دوره ای متناظر هر دوره برای DMU به صورت زیر محاسبه می شود:

$$E_{Overall} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i^* X_{ij}} = \sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rj}, \quad E^{(p)} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rk}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik}^{(p)}}$$

همچنین می توان کارایی کل را به عنوان میانگین وزن دار شده کارایی هر دوره محاسبه کرد که در آن وزن مربوط به هر دوره به صورت

$$w^{(p)} = \frac{\sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik}}$$

به طور جداگانه محاسبه می شود. سپس برای به دست آوردن کارایی کلی در حالت چند دوره ای، وزن هر دوره را به

کارایی دوره مربوطه ضرب کرده و سپس کلیه دوره ها جمع می شود، حاصل جمع را کارایی کلی می نامند. به عبارت دیگر:

$$E_{Overall} = \sum_{p=1}^q w^{(p)} E^{(p)} = \sum_{p=1}^q \frac{\sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik}} \times \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rk}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik}^{(p)}} = \frac{\sum_{p=1}^q \sum_{r=1}^s u_r^* Y_{rk}^{(p)}}{\sum_{i=1}^m v_i^* X_{ik}} = E_{Overall}$$

وزن های انتخاب شده توسط هر واحد بهترین وزن انتخاب شده برای محاسبه کارایی کل است، لذا برای تمام $DMUs$ یکسان نیست؛ یعنی مدل (۴) نه تنها کارایی کل و کارایی دوره ای را در یک سیستم چند دوره ای به صورت هم زمان محاسبه می کند بلکه قادر به ایجاد رابطه ریاضی بین این دو کمیت است.

۳- روش پژوهش

مجددا فرض کنید X_{ij} و Y_{rj} به ترتیب i th ورودی و r th خروجی $(i=1,\dots,m)$ ، $(r=1,\dots,s)$ ، $DMU_j (j=1,\dots,n)$ باشند و سیستم نیز متشکل از q دوره باشد که هر دوره ورودی نظیر $X_{ij}^{(p)}$ را برای تولید خروجی $Y_{rj}^{(p)}$ مصرف می کند. دوباره شکل ۱ را در نظر بگیرید. برای ارزیابی هم زمان کارایی کلی و کارایی مختص هر دوره (کارایی دوره ای) در سیستم چند دوره ای متشکل از q ، مدل (۴) توسط کایو و لیو [8] پیشنهاد گردید. همان طور که از مدل (۴) برمی آید، دو قید اول و دوم مجموع تمام ورودی ها و خروجی های هر دوره با ضریب مربوط به هر دوره در مدل گنجانده شده است. سوالی که در برآورد کارایی سیستم های چند دوره ای با چند دوره زمانی مجزا پیش می آید مفهوم ناکارایی کاذب است. به این معنی که امکان دارد واحدی در تمام دوره ها کارا باشد، اما در کل طول بازه زمانی مورد ارزیابی کارا نباشد. یکی از دلایل ایجاد این ناکارایی، عدم استفاده از تمام ورودی ها برای تولید خروجی است؛ به عبارت دیگر ممکن است سهم ورودی در تولید خروجی صفر منظور گردد؛ بنابراین به دنبال پاسخ این سوال هستیم که آیا تمام ورودی ها در محاسبه تمام خروجی ها دخالت دارد یا نه؟ برای رسیدن به پاسخ این پرسش، از مدل های تحلیل پوششی داده های نسبی استفاده می کنیم. علت استفاده از این مدل ها در انعطاف پذیری آن ها است. علاوه بر این، استفاده از نسبت ها یکی از روش های معمول و پذیرفته شده در اندازه گیری کارایی می باشد. در روش نسبی ارقام مربوط به هم در اطلاعات عددی مدیریت محاسبه و تحلیل می شود. نسبت ها در زمینه های مختلف مالی، اقتصادی و صنعتی مورد استفاده قرار می گیرد. به همین دلیل در این روش نیز از مدل های تحلیل پوششی داده های نسبی استفاده می شود. با استفاده از مدل تحلیل پوششی داده های $DAE-R$ ، الگوریتمی سه مرحله ای برای تعیین ناکارایی کاذب پیشنهاد می شود. برای پاسخ به این سوال، از مدل های

DAI استفاده می شود و سپس الگوریتمی سه مرحله ای پیشنهاد می گردد. بدون خلل به کلیت استدلال، سیستم چندمرحله ای با q دوره زمانی مجزا از هم را در نظر می گیریم. سه گام پیشنهادی در این الگوریتم به شرح زیر است:

در گام اول ابتدا با استفاده از مدل های $DEA-R$ کارایی هر دوره به صورت مجزا محاسبه می شود. برای این منظور مبتنی بر ساختار مدل های $DEA-R$ که در بخش های قبلی به آن اشاره شده است از مدل (۵) برای ارزیابی کارایی دوره ای هر دوره استفاده می شود.

$$\theta_p = \text{Max}_{(u,v)} \text{Min}_{j,p} \left(\sum_{i=1}^m v_i \frac{X_{ij}^{(p)}}{X_{ip}^{(p)}} \right) \left(\sum_{r=1}^s u_r \frac{Y_{rj}^{(p)}}{Y_{rp}^{(p)}} \right),$$

(۵)

s.t.

$$\sum_{r=1}^s u_r = 1, \quad \sum_{i=1}^m v_i = 1,$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \text{ for all } i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s.$$

یکی از ویژگی های این مدل یکسان بودن ضرایب مربوط به فاکتورهای ورودی و خروجی صرف نظر از دوره متناظر می باشد و ε کمیت بی نهایت کوچک غیر ارشمیدسی است. بعد از محاسبه کارایی تمام دوره ها، میانگین کارایی دوره ها را محاسبه می کنیم. در گام دوم با استناد به نظر کایو و لیو [8] با در نظر گرفتن مجموع ورودی تمام دوره ها به عنوان ورودی کل یا $X_{ij} = \sum_{p=1}^q X_{ij}^{(p)}$ و مجموع خروجی تمام دوره ها به عنوان خروجی کل یا $Y_{rj} = \sum_{p=1}^q Y_{rj}^{(p)}$ ، کارایی سیستم به عنوان یک سیستم جعبه سیاه با مدل $DEA-R$ زیر سنجیده می شود:

$$\theta_p = \text{Max}_{(u,v)} \text{Min}_{j,p} \left(\sum_{i=1}^m v'_i \frac{X_{ij}}{X_{ip}} \right) \left(\sum_{r=1}^s u'_r \frac{Y_{rj}}{Y_{rp}} \right),$$

(۶)

s.t.

$$\sum_{r=1}^s u'_r = 1, \quad \sum_{i=1}^m v'_i = 1,$$

$$u_r, v_i \geq \varepsilon \text{ for all } i = 1, \dots, m, r = 1, \dots, s.$$

البته شایان ذکر است که وزن های به کاررفته در مدل (۶) متفاوت از وزن های استفاده شده در مدل (۵) است. مدل (۶) در واقع کارایی کل سیستم را به عنوان یک جعبه سیاه می سنجد و اصلا روابط درون سیستم را در نظر نمی گیرد. گام سوم، در حقیقت تعیین ناکارایی کاذب سیستم می باشد که با استفاده از یک نسبت محاسبه می گردد. این نسبت به صورت خارج قسمت کارایی درون سیستم (میانگین کارایی های دوره ای) به کارایی کل سیستم که در مرحله دوم سنجیده شده است، محاسبه می شود. اگر نسبت برابر با یک باشد، به این معنی است که میانگین کارایی هر دوره و کارایی کل هر دو با هم برابر است و لذا نسبت آن ها نیز یک است. در صورتی که این نسبت از یک بزرگ تر باشد به این معنی است که ناکارایی کاذب داریم یعنی اختلاف بین دو کارایی مورد محاسبه بیشتر است. در صورتی که این نسبت از یک کمتر باشد ناکارایی کاذب نداریم، یعنی این دو برآورد به هم نزدیک هستند و می توان گفت ناکارایی کاذب موجود نیست؛ اما اگر این نسبت از یک بزرگ تر باشد، در این صورت اختلاف بین دو کارایی محاسبه بیشتر خواهد بود و این دلالت بر وجود ناکارایی کاذب دارد.

۴- یافته های پژوهش

جهت تشریح مدل پیشنهادی، داده های به کاررفته در مقاله کایو و لیو [8] جهت ارزیابی ۲۲ بانک تجاری در تایوان در سال های ۲۰۰۹ تا ۲۰۱۱ مورد استفاده قرار گرفته است. جدول ۱ میانگین سه ساله داده های ورودی و خروجی را نشان می دهد.

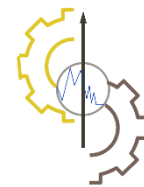
جدول ۱- میانگین سه ساله داده های ورودی و خروجی ها.

Table 1- The Average of inputs/outputs in three years.

DMU	Labour	Physical Capital	Purchased Funds	Demand Deposits	S-term Loans	M-terms Loarn
Chang Hwa	8.30	23.84	948.30	290.20	302.25	756.25
Kings Town	0.88	2.91	116.98	18.33	24.85	70.88
Taichung	1.80	3.38	238.69	65.53	77.47	169.20
Taiwan Business	6.73	14.15	754.38	241.95	256.18	669.49
Kaohsiung	1.23	2.24	144.33	20.01	66.64	88.50
Cosmos	2.00	6.25	95.74	12.26	34.19	38.44

Table 1- Continued.

DMU	Labour	Physical Capital	Purchased Funds	Demand Deposits	S-term Loans	M-terms Loarn
Union	2.46	8.13	251.11	41.76	40.90	140.29
Far Eastern	2.69	2.69	294.05	30.58	59.90	182.35
Ta Chong	3.66	4.30	254.56	47.94	65.28	191.43
En Tie	1.72	2.12	202.39	22.49	40.60	153.44
Hua Nan	9.49	25.68	1113.28	447.03	404.53	805.32
Fubon	6.57	11.51	913.13	224.18	220.77	657.54
Cathay	7.67	25.61	1135.10	224.48	228.03	682.71
East Sun	4.33	14.55	400.38	190.59	120.09	482.30
Yuanta	2.58	2.61	320.56	52.41	59.34	237.40
Mega	10.64	14.61	1070.72	462.10	391.09	958.96
Taishin	7.15	22.27	574.74	124.71	121.81	419.29
Shin Kong	2.91	6.20	353.67	68.37	68.84	257.27
Sino Pac	6.74	9.23	725.91	156.80	153.29	559.04
China Trust	16.40	33.61	855.35	119.02	260.26	733.77
First	9.73	23.75	1178.52	396.36	188.29	844.43
Taiwan	12.92	34.31	1708.72	367.29	176.79	1459.07
Cooperaive						



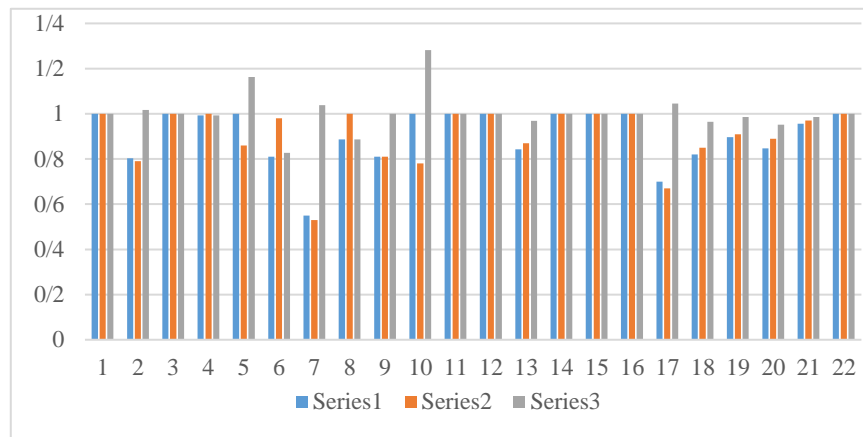
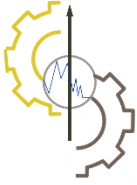
با استناد به مقاله کاپو و لپو [8] داده‌های ورودی عبارت‌اند از: نیروی انسانی (*Labor*)، سرمایه مادی (*Physical capital*)، سهام‌های خریداری‌شده (*Purchased commercial*) و سپرده‌های موردنیاز (*Demand deposits*)، وام‌های کوتاه‌مدت (*Short-term loans*) و وام‌های میان‌مدت و کوتاه‌مدت (*Medium-and long term loans*) را به‌عنوان سه فاکتور خروجی در نظر گرفته شده است. با اجرای مدل پیشنهادی، کارایی کل و میانگین کارایی هر دوره برای این ۲۲ واحد محاسبه‌شده و نتیجه در جدول ۲ گزارش شده است.

جدول ۲- نتایج حاصل از اجرای روش پیشنهادی.

Table 2- The results of the implementation of the proposed method.

DMU	2009	2010	2011	Average	Overall	Ratio	Pseudo Inefficiency
1	1	1	1	1	1	1	NO
2	0.73	0.89	0.79	0.80	0.79	1.02	YES
3	1	1	1	1	1	1	NO
4	1	1	0.98	0.99	1	0.99	NO
5	1	1	1	1	0.86	1.16	YES
6	0.82	0.85	0.76	0.81	0.98	0.83	NO
7	0.49	0.61	0.55	0.55	0.53	1.04	YES
8	1	0.86	0.80	0.88	1	0.89	NO
9	0.72	0.84	0.87	0.81	0.81	1	NO
10	1	1	1	1	0.78	1.28	YES
11	1	1	1	1	1	1	NO
12	1	1	1	1	1	1	NO
13	0.84	0.84	0.85	0.84	0.87	0.97	NO
14	1	1	1	1	1	1	NO
15	1	1	1	1	1	1	NO
16	1	1	1	1	1	1	NO
17	0.54	0.76	0.80	0.7	0.67	1.05	YES
18	0.83	0.81	0.82	0.82	0.85	0.97	NO
19	0.92	0.92	0.85	0.89	0.91	0.99	NO
20	0.69	0.94	0.91	0.84	0.89	0.95	NO
21	0.92	0.96	0.99	0.95	0.97	0.99	NO
22	1	1	1	1	1	1	NO
AVE	0.88	0.92	0.91	0.875	0.90	-----	-----
VAR	0.02	0.01	0.01	0.007	0.02	-----	-----
C.V.	18.0%	11.31%	13.16%	13.46%	14.1%		

ستون دوم تا چهارم در جدول ۲، اعداد حاصل از کارایی دوره‌ای هر دوره مستقل از دوره‌های دیگر است که با استفاده از مدل (۵)، *DEA*-*R* محاسبه شده است. ستون پنجم میانگین این کارایی‌ها را به‌عنوان صورت کسر موردنظر در نظر می‌گیرد. کارایی کلی نیز با محاسبه مجموع تمام ورودی‌های هر دوره به‌عنوان ورودی نهایی و خروجی‌های هر دوره به‌عنوان خروجی کل با استفاده از مدل (۶) محاسبه شده است. در ستون هفتم، نسبت دو کارایی محاسبه‌شده در نظر گرفته شده است. هرچقدر این نسبت به عدد یک نزدیک باشد، این دو برآورد به هم نزدیک هستند و هرچقدر این نسبت از یک بزرگ‌تر باشد در این صورت، این دو برآورد فاصله زیادی از هم دارند و ناکارایی کاذب وجود دارد. بنا به این برآورد، واحدهای ۲، ۵، ۷، ۱۰ و ۱۷ ناکارایی کاذب دارند؛ زیرا نسبت حاصل عددی بزرگ‌تر از یک است. برای تحلیل ناکارایی کاذب، کارایی کل، میانگین کارایی سه دوره و نسبت حاصل این دو کمیت عددی در شکل ۲ مقایسه شده‌اند.



شکل ۲- ناکارایی کاذب.

Figure 2- Pseudo inefficiency.

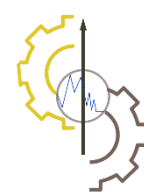
در این شکل، خطوط آبی رنگ، میانگین کارایی سه دوره، خطوط نارنجی، کارایی کل و خطوط خاکستری، نسبت این دو کمیت را نمایش می دهد. واحدهای دو، پنج، هفت، ده و هفده همان طور که معلوم است ناکارایی کاذب دارند و این نتیجه از روی شکل نیز کاملاً مشخص است. مدل (۴) نیز بر روی داده های جدول ۱ پیاده سازی شده و نتایج آن در جدول ۳ نمایش داده شده است. ستون آخر جدول، کارایی کل حاصل از روش پیشنهادی است.

جدول ۳- نتایج حاصل از اجرای مدل (۴).

Table 3- The results of model (4).

DMU	2009	2010	2011	Overall Model (4)	Overall
1	0.91	0.86	0.92	0.90	1
2	0.70	0.77	0.76	0.75	0.79
3	0.96	0.95	1	0.97	1
4	1	0.95	0.95	0.97	1
5	0.91	1	1	0.97	0.86
6	0.74	0.80	0.68	0.74	0.98
7	0.47	0.53	0.51	0.51	0.53
8	0.77	0.71	0.80	0.76	1
9	0.62	0.72	0.83	0.72	0.81
10	0.92	0.91	0.87	0.90	0.78
11	0.93	1	1	0.98	1
12	0.95	0.95	1	0.97	1
13	0.80	0.81	0.83	0.82	0.87
14	1	0.99	0.97	0.99	1
15	0.91	0.93	1	0.95	1
16	0.97	0.94	1	0.97	1
17	0.53	0.53	0.53	0.53	0.67
18	0.80	0.82	0.82	0.81	0.85
19	0.85	0.84	0.83	0.84	0.91
20	0.60	0.63	0.65	0.63	0.89
21	0.87	0.97	0.95	0.93	0.97
22	0.98	0.97	1	0.98	1
AVE	0.83	0.84	0.86	0.845	0.905
VAR	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
C.V.	19%	17.2%	17.9%	17.6%	14.1%

با مقایسه دو ستون آخر در جدول ۳، اختلاف زیادی بین اعداد کارایی محاسبه شده در دو مدل وجود ندارد. هر چند میانگین کارایی کل محاسبه شده در مدل پیشنهادی، اندکی بیشتر از مدل (۴) است؛ اما واریانس کارایی محاسبه شده برای کارایی کل به دست آمده با هر دو مدل یکسان است. همچنین از جدول ۳ چنین برمی آید که واریانس کارایی های دوره ای در مدل (۴) با واریانس کارایی کل برابر است. بررسی ضریب تغییرات در سه دوره و همچنین در کارایی کل محاسبه شده با مدل (۴) و مدل پیشنهادی، در سطر آخر جدول ۳ دلالت بر این دارد که پراکندگی کارایی کل در مدل پیشنهادی از مدل (۴) کمتر است؛ و این به دلیل ساختار مدل (۴) است که صرفاً تکیه بر برآورد هم زمان کارایی دوره ای و کارایی کلی دارد. مقایسه ضریب تغییرات محاسبه شده در سطر آخر جدول های ۲ و ۳ بیانگر این است که پراکندگی کارایی محاسبه شده با روش *DEA-R* از پراکندگی کارایی محاسبه شده با مدل (۴) کمتر است. با استفاده از مفهوم ضریب تغییرات، امکان مقایسه کارایی ها در دو مدل (۴) و در مدل *DEA-R* فراهم می شود. در مدل پیشنهادی با استفاده از مدل های *DEA-R* کارایی دوره ای و کارایی کلی محاسبه شد و نسبت عددی حاصل از کارایی های به دست آمده به عنوان تقریبی برای برآورد ناکارایی کاذب در

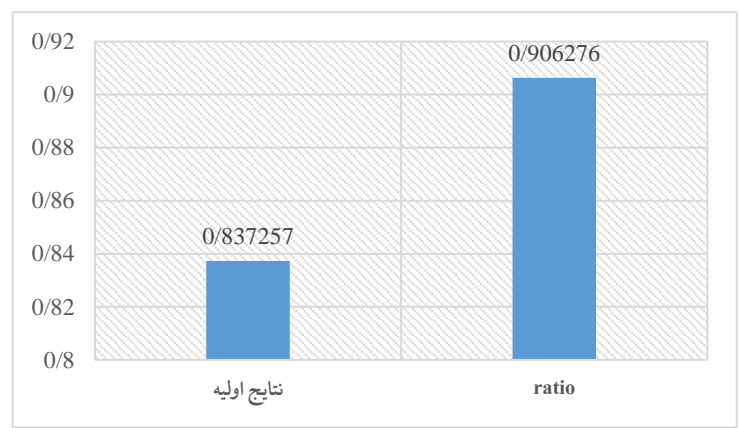


سیستم چندمرحله‌ای مورد استفاده قرار گرفت. در روش پیشنهادی بدون محاسبه اوزان که در مدل (۴) بیشتر مورد توجه بود، هدف تعیین تشخیص ناکارایی کاذب بود. خطای معیار در مدل (۴) برابر با ۰/۳۲۶۲۵۸ و در روش پیشنهادی این عدد برابر ۰/۲۷۸۷۹۵ می باشد. برای تایید نتایج، از آزمون‌های آماری نیز استفاده می شود. نتایج آزمون یومن-ویتنی نیز نشانگر تفاوت معنی دار میانگین کارایی کل در روش پیشنهادی است و نشانگر بالاتر بودن اندازه میانگین کارایی کل در روش *DEA-R* است.

جدول ۴- نتایج آزمون یومن-ویتنی.
Table 4- Mann-Whitney test result.

124.000	Mann-Whitney U
355.000	Wilcoxon W
-2.428	Z
.015	Asymp. Sig. (2-tailed)

با انجام آزمون تی تست بر روی نتایج حاصل از این دو روش، نتیجه این آزمون نشانگر این است که میانگین کارایی کل دو روش باهم متفاوت است و میانگین کارایی کل با استفاده از روش تحلیل پوششی داده‌های نسبی بیشتر بوده است. شکل ۳ نیز این مساله را تایید می کند.



شکل ۳- نتایج آزمون تی-تست.
Figure 3- T-test result.

نتایج آماری، نشان می دهد استفاده از مدل *DEA-R* در سیستم‌های چندمرحله‌ای و به تبع آن تشخیص ناکارایی کاذب بدون استفاده از وزن، می تواند روش قابل اطمینانی باشد. به نحوی که اگر نسبت حاصل از دو عدد کارایی کل و میانگین کارایی دوره‌ای، از یک بزرگ تر باشد به این معنی است که ناکارایی کاذب داریم یعنی اختلاف بین دو کارایی مورد محاسبه بیشتر است. در صورتی که این نسبت از یک کمتر باشد ناکارایی کاذب نداریم، یعنی این دو برآورد به هم نزدیک هستند و می توان گفت ناکارایی کاذب موجود نیست.

۵- بحث و نتیجه گیری

سیستم‌های چند دوره‌ای و ارزیابی کارایی آن‌ها در سال‌های اخیر بسیار مورد توجه محققان و علاقه‌مندان بوده است. روش تحلیل پوششی داده‌های پویا و تحلیل پوششی مبتنی بر تحلیل کسری از جمله تلاش‌هایی برای ارزیابی چنین سیستم‌هایی می باشد. یکی از مسائلی که در سیستم‌های چند دوره‌ای با دوره‌های زمانی مستقل از هم مواجه هستیم مساله ناکارایی کاذب است. به این مفهوم که ممکن است واحدی در هر دوره زمانی کارا باشد اما در کل طول دوره کارا نباشد. در این مقاله به جای استفاده از وزن‌ها که از هر دوره زمانی به دست می آمد، از الگوریتم سه مرحله‌ای با استفاده از تحلیل پوششی داده‌های کسری استفاده کردیم. علت استفاده از مدل‌های تحلیل کسری انعطاف پذیری این مدل‌هاست. مضاف بر این که استفاده از این مدل‌ها به جای استفاده از اطلاعات ورودی و خروجی که ممکن است در دسترس نباشد نسبتی از ورودی‌ها و خروجی‌ها را در مدل وارد می کند که به واقعیت نزدیک تر است. در گام اول، کارایی دوره‌ای هر دوره را مجزا از دوره‌های دیگر با استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی مبتنی بر داده‌های کسری محاسبه نمودیم و میانگین این کارایی‌ها را در نظر گرفتیم. گام دوم کارایی کل سیستم را به صورت یک جعبه سیاه با استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی مبتنی بر داده‌های کسری محاسبه نمودیم. در نهایت با محاسبه نسبت این دو کمیت، به مساله وجود ناکارایی کاذب نزدیک شدیم. اگر نسبت موجود عددی نزدیک به یک باشد، یعنی این دو برآورد به هم نزدیک هستند و ناکارایی کاذب وجود ندارد اما اگر عدد حاصل از یک بزرگ تر باشد، ناکارایی کاذب موجود است. برای مقایسه، روش پیشنهادی و روش کاپو و لیو [8] بر روی داده‌های واقعی در طول یک دوره زمانی سه ساله اجرا شده و با مقایسات آماری،

ن شد که پراکنندگی کارایی حاصل از مدل پیشنهادی مبتنی بر تحلیل پوششی داده‌های کسری از پراکنندگی کارایی محاسبه شده با مدل موجود کمتر می‌باشد. آزمون‌های آماری نیز دلالت بر قوت روش موجود در قیاس با روش کایو و لیو [8] دارد.

منابع مالی

هیچ‌گونه بودجه یا کمک‌هزینه تحقیق در طی مطالعه مذکور دریافت نشده است.

تعارض با منافع

بدین‌وسیله نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد، همه نویسندگان، نسخه نهایی ارسال شده را مشاهده و تایید کرده‌اند. نویسندگان تضمین می‌کنند که مقاله، اثر اصلی آن‌ها بوده، قبلاً چاپ نشده و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

منابع

- [1] Farrell, M. J. (1957). The measurement of productive efficiency. *Journal of the royal statistical society: series a (general)*, 120(3), 253-281.
- [2] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429-444.
- [3] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9), 1078-1092.
- [4] Fare, R., & Grosskopf, S. (1996). *Intertemporal production frontiers: with dynamic DEA*. Springer Dordrecht.
- [5] Kao, C. (2014). Network data envelopment analysis: a review. *European journal of operational research*, 239(1), 1-16.
- [6] Tone, K., & Tsutsui, M. (2014). Dynamic DEA with network structure: a slacks-based measure approach. *Omega*, 42(1), 124-131.
- [7] Mariz, F. B. A. R., Almeida, M. R., & Aloise, D. (2017). A review of dynamic data envelopment analysis: state of the art and applications. *International transaction in operation research*, 25(2), 469-505.
- [8] Kao, C., & Liu, S. T. (2014). Multi-period efficiency measurement in data envelopment analysis: the case of taiwanese commercial banks. *Omega*, 47, 90-98. <https://doi.org/10.1016/j.omega.2013.09.001>
- [9] Jablonsky, J., Marek, L., & Berka, P. (2018). Multi-period data envelopment analysis models and resource allocation: a case study. *Journal of physics: conference series* (Vol. 1026, No. 1, p. 012002). IOP Publishing. DOI: [10.1088/1742-6596/1026/1/012002](https://doi.org/10.1088/1742-6596/1026/1/012002)
- [10] Bansal, P., & Mehra, A. (2018). Multi-period additive efficiency measurement in data envelopment analysis with non-positive and undesirable data. *Operational research society of India*, 55, 642-661.
- [11] Tavana, M., Khalili-Damghani, K., Arteaga, F. J. S., & Hosseini, A. (2019). A fuzzy multi-objective multi-period network DEA model for efficiency measurement in oil refineries. *Computers and industrial engineering*, 135, 143-155.
- [12] Xu, Y. W., Zhang, H. J., Cheng, K., Zhang, Z. X., & Chen, Y. T. (2021). Efficiency measurement in multi-period network DEA model with feedback. *Expert systems with applications*, 175, 114815. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2021.114815>
- [13] Despić, O., Despić, M., & Paradi, J. C. (2007). DEA-R: Ratio-based comparative efficiency model, its mathematical relation to DEA and its use in applications. *Journal of productivity analysis*, 28(1-2), 33-44.
- [14] Wei, C. K., Chen, L. C., Li, R. K., & Tsai, C. H. (2011). Using the DEA-R model in the hospital industry to study the pseudo-inefficiency problem. *Expert systems with applications*, 38(3), 2172-2176.
- [15] Wei, C. K., Chen, L. C., Li, R. K., & Tsai, C. H. (2011). A study of developing an input-oriented ratio-based comparative efficiency model. *Expert systems with applications*, 38(3), 2473-2477.
- [16] Mozaffari, M. R., Gerami, J., & Jablonsky, J. (2014). Relationship between DEA models without explicit inputs and DEA-R models. *Central european journal of operations research*, 22, 1-12.
- [17] Mozaffari, M. R., Kamyab, P., Jablonsky, J., & Gerami, J. (2014). Cost and revenue efficiency in DEA-R models. *Computers & industrial engineering*, 78, 188-194. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2014.10.001>
- [18] Gerami, J., Mozaffari, M. R., & Wanke, P. F. (2020). A multi-criteria ratio-based approach for two-stage data envelopment analysis. *Expert systems with applications*, 158, 113508. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2020.113508>
- [19] Mozaffari, M. R., Gerami, J., Wanke, P. F., Kamyab, P., & Peyvas, M. (2022). Ratio-based data envelopment analysis: an interactive approach to identify benchmark. *Results in control and optimization*, 6, 100081. <https://doi.org/10.1016/j.rico.2021.100081>
- [20] Mozaffari, M. R., Dadkhah, F., Jablonsky, J., & Wanke, P. F. (2020). Finding efficient surfaces in DEA-R models. *Applied mathematics and computation*, 386, 125497. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2020.125497>

